جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله اول
بیست و سومین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۳

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
چند گزینه‌ای	مسأله‌های کوتاه	
۳۰	–	۲۴۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۱. کد برگه سوالات شما **۱** است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه بزنید، **در غیر این صورت پاسخ نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد.** توجه داشته باشید کد برگه‌ی سولات شما در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است. با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.

۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سولات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۳. یک برگ پاسخنامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۴. برگه‌ی پاسخنامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با **مداد مشکی نرم** در محل مربوط علامت بزنید. لطفا خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

۵. در سوال‌های **چهار گزینه‌ای** به هر پاسخ درست ۳ نمره‌ی مثبت و به هر پاسخ نادرست یک نمره‌ی منفی تعلق می‌گیرد. در **مسأله‌های کوتاه** به هر پاسخ درست ۸ نمره مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمره‌ی منفی ندارد.

۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۷. آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان **صرفاً جنبه‌ی آزمایشی و آمادگی** دارد و شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان انتخاب می‌شود.

۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته‌اند، **در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخنامه تحویل داده شود.**

www.MAAKH.ir

کلیه حقوق این سوالات برای ماخ محفوظ است.

۱- پس از بسط دادن $(۱+۲x+۳x^۲+\ldots+۹x^۸+۱۰x^۹)^۲$، چند تا از ضرایب فرد است؟

الف) ۱ ب) ۵ ج) ۷ د) ۹ هـ) ۱۰

۲- در برکه‌ای ۷ قطعه سنگ وجود دارد که از چپ به راست با اعداد ۱ تا ۷ شماره‌گذاری شده‌اند. قورباغه‌ای روی سنگ شماره یک نشسته است. فاصله سنگ‌ها به گونه‌ای است که اگر قورباغه روی سنگ iام باشد می‌تواند حداکثر تا i سنگ جلوتر بپرد. به چند طریق ممکن است قورباغه، بدون برگشتن به سمت چپ به سنگ شماره ۷ برود؟

الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۳ هـ) ۱۴

۳- به چند طریق می‌توان سه زیرمجموعه دو عضوی از مجموعه $\{۱,۲,\ldots,۶\}$ انتخاب کرد به طوری که هر دو تا از آن‌ها دقیقاً یک عضو مشترک داشته باشند.

الف) ۲۰ ب) ۴۰ ج) ۵۰ د) ۶۰ هـ) ۸۰

۴- به ازای چند عدد طبیعی n، $\left[\frac{n^۲}{۳}\right]$ عدد اول است؟ ($\left[x\right]$ جز صحیح x است.)

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) بی‌نهایت هـ) چنین عددی وجود ندارد.

۵- چهارضلعی $ABCD$ در بین چهارضلعی‌هایی که داخل نیم‌دایره‌ای به شعاع واحد قرار دارند، بیشترین مساحت را دارد. مساحت $ABCD$ چه قدر است؟

الف) ۱ ب) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$ ج) $\frac{۶}{۵}$ د) $\frac{\sqrt{۷}}{۷}$ هـ) $\sqrt{۲}$

۶- در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$، نیمساز زاویه C مثلث ABC را به دو مثلث متساوی‌الساقین دیگر تقسیم کرده است. نسبت $\frac{BC}{AB}$ برابر با کدام یک از اعداد زیر است؟

الف) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$ ب) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ج) $\sqrt{۲}$ د) $\frac{۱}{۲}$ هـ) $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$

۷- A و سهمی $y=x^۲-۲ax+۱$ و خط $y=۲b(a-x)$ را در نظر بگیرید. تعریف کنید $A=\{(a,b)\in\mathbb{R}^۲ \mid$ {خط و سهمی مذکور یکدیگر را قطع نمی‌کنند}$\}$

مساحت A چقدر است؟

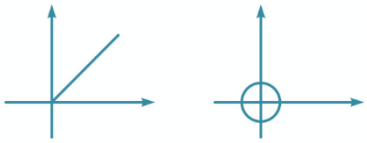
الف) $\frac{\pi}{۴}$ ب) $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ ج) A بی‌کران است د) ۱ هـ) π

۸- ۱۸ خط در صفحه طوری رسم شده است که هر کدام افقی، عمودی یا موازی نیمساز ربع اول و سوم (یعنی خط $y=x$) است. در این وضعیت، صفحه حداکثر به چند قسمت (کران‌دار یا بی‌کران) تقسیم شده است؟

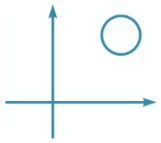
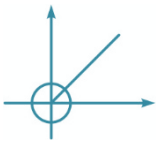
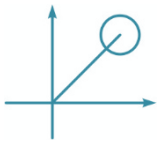
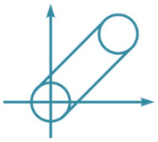
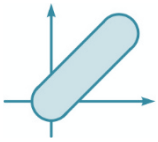
الف) ۶۳ ب) ۸۱ ج) ۱۲۱ د) ۱۲۷ هـ) ۲۱۶

۹- فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از نقاط صفحه باشند. مجموعه $A \oplus B$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$A \oplus B = \{(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \,|\, (x_1, y_1) \in A, (x_2, y_2) \in B\}$$



اگر A و B پاره‌خط دایره نشان داده شده در شکل مقابل باشند، آن‌گاه $A \oplus B$ کدام یک از شکل‌های زیر خواهد بود؟

الف)  ب)  ج)  د)  هـ) 

۱۰- قطر یک زیر مجموعه از صفحه یعنی بزرگ‌ترین فاصله بین نقاط آن، به عنوان مثال، قطر هر مثلث برابر طول بزرگ‌ترین ضلع آن است. فرض کنید قطر دو مجموعه A و B برابر d است. کمترین و بیشترین مقدار قطر $A \oplus B$ چقدر است؟ (A همان است که در سؤال قبل تعریف شده است.)

الف) d و d ب) $\sqrt{2}d$ و $\sqrt{3}d$ ج) d و $2d$ د) $\sqrt{2}d$ و $2d$ هـ) $2d$ و $3d$

۱۱- مجموعه‌های A_k، $k \in \mathbb{N}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} A_1 = \text{مجموعه اعداد اول} \\ A_{k+1} = \{a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_{k+1} \,|\, a_1, a_2, \ldots, a_{k+1} \in A_k\} \end{cases}$$

توجه کنید که $a_{k+1}, \ldots, a_2, a_1$ لزوماً متمایز نیستند. کدام یک از اعداد زیر، دست‌کم عضو یکی از A_kها است؟

الف) $2^{243} \times 3^7$ ب) $2^{25} \times 5^{25}$ ج) $2^{231} \times 7^{25}$ د) $2^{111} \times 3^9$ هـ) $2^{60} \times 3^{12} \times 5^6$

۱۲- به ازای چند مقدار طبیعی برای a، معادله $\frac{1}{x} = \frac{a}{x+y} - \frac{1}{y}$ در مجموعه اعداد طبیعی جواب دارد؟

الف) چنین aای وجود ندارد. ب) یکی ج) دوتا د) چهارتا هـ) بی‌نهایت

۱۳- می‌توان ثابت کرد در هر مثلث دلخواه ABC، قرینه مرکز ارتفاعیه (محل همرسی ارتفاع‌ها) نسبت به وسط ضلع BC روی دایره محیطی مثلث قرار می‌گیرد. این نقطه را D بنامید. اندازه زاویه DAC برابر است با:

الف) $\frac{A}{2}$ ب) $\frac{B}{2}$ ج) $90^\circ - A$ د) $90^\circ - B$ هـ) $90^\circ - \frac{A+B}{2}$

۱۴- فرض کنید: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی وارون‌پذیر باشد و $h(x) = \frac{kf(x)}{1 - f(x)}$، اگر h وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $\frac{x}{f \circ h^{-1}(x)} - x$ برابر است با:

الف) $f(x)$ ب) $h(x)$ ج) kx د) k هـ) $\frac{x}{f(x)} - x$

۱۵- کاغذی مستطیل‌شکل را چندین بار تا کرده‌ایم. در هر مرحله تا بر روی خطی موازی دو ضلع و در وسط آن‌ها زده شده است تا به مستطیلی با مساحت نصف مستطیل قبل برسیم. واضح است که در هر مرحله این کار به دو روش (افقی و عمودی) امکان‌پذیر است. در نهایت، همه تاها را باز کرده‌ایم و دیده‌ایم در مجموع ۳۱۸ خط تای افقی و عمودی تولید شده است. کاغذ چند بار تا شده است؟

الف) ۱۳ ب) ۱۴ ج) ۱۵۹ د) ۳۱۷ هـ) ۳۱۸

۱۶- مربع توپری به ضلع واحد در فضا در نظر بگیرید. حجم مجموعه نقاطی که فاصله آن‌ها دست کم از یکی از نقاط مربع کوچک‌تر یا مساوی ۱ باشد، چقدر است؟

الف) ۲ ب) $۲(۱+\frac{۲}{۳}\pi)$ ج) $۲(۱+\pi)$ د) ۸ هـ) $۲(۱+\frac{۵}{۳}\pi)$

۱۷- فرض کنید $S(n)$ مجموع ارقام عدد n باشد. چند عدد هفت‌رقمی n وجود دارد که ارقام ۱ تا ۹ دقیقاً یک بار در بین رقم‌های n و $S(n)$ ظاهر شده باشد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۵۰۴۰ هـ) ۱۰۰۸۰

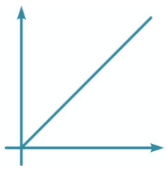
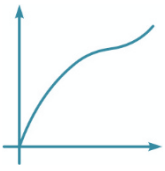
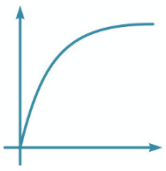
۱۸- فرض کنید عدد طبیعی a داده شده است. در هر گام، به جای عددی که در اختیار داریم یکی از عددهای $۲a+۱$، $۳a+۲$، $۴a+۳$ و یا $۵a+۴$ را در نظر می‌گیریم و کار را با آن ادامه می‌دهیم. با شروع از کدام یک از اعداد زیر، می‌توان بعد از تعدادی گام به عدد $۳۰^{۱۳۸۳}-۱$ رسید؟

الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۳ هـ) هیچ‌کدام

۱۹- فرض کنید $f_۰(x)=x$ و برای هر $n\geq ۰$، $f_{n+۱}(x)=\sqrt{۱-f_n(x)}$، دامنه تابع $f_{۱۳۸۳}(x)$ کدام است؟

الف) $(-\infty,۱]$ ب) $[۰,۱]$ ج) $[۰,\frac{۱}{۲^{۱۳۸۳}}]$ د) $\{۱\}$ هـ) $\{۰\}$

۲۰- در ظرفی به شکل روبه‌رو با نرخ ثابت در هر دقیقه یک لیتر آب می‌ریزیم. کدام یک از نمودارهای زیر می‌توان نشان‌دهنده ارتفاع آب بر حسب زمان باشد؟

الف)  ب)  ج)  د) هـ)

۲۱- در دایره‌ای به شعاع واحد، AB کمانی ۶۰° و XY قطر متغیری از دایره است. خطوط XA و YB یکدیگر را در نقطه P قطع می‌کنند. مکان هندسی محل برخورد ارتفاع‌های مثلث PXY چیست؟

الف) دایره به شعاع $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ب) خطی به موازات AB و به فاصله $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ از آن

ج) دایره‌ای به شعاع $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

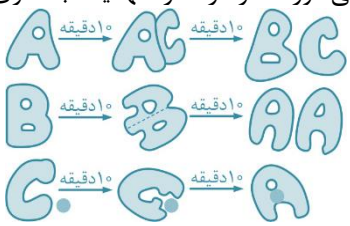
د) خطی به موازات AB و به فاصله $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ از آن

هـ) دایره‌ای به شعاع ۱

۲۲- یک عدد طبیعی را یکنوا می‌گوییم هرگاه رقم صفر نداشته باشد و به علاوه ارقام آن به صورت اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی مرتب شده باشند. مثلاً اعداد ۱۳۵۶ و ۷۲ یکنوا هستند اما اعداد ۲۲، ۲۰۳۴ و ۱۳۸۳ یکنوا نیستند. مجموع همه اعداد یکنوای چهاررقمی چند است؟

الف) ۱۳۹۹۸۶۰ ب) ۹۹۹۹۹۸۰ ج) ۷۹۵۵۴۲۰ د) ۱۲۶۰۰۰۰ هـ) ۴۹۴۹۵۵۰

۲۳- بیماری کشنده ABC توسط باکتری‌ای به همین نام تولید می‌شود. این باکتری در واقع دارای سه نوع A، B و C است که طبق این قوانین به هم تبدیل می‌شوند: پس از گذشت هر ۲۰ دقیقه هر باکتری A به یک B و یک C، هر باکتری B به A و هر باکتری C به یک A تبدیل می‌شود. به علاوه هر بار که C به A تبدیل می‌شود یک گلبول قرمز را نیز می‌خورد! اگر در آغاز تنها یک باکتری از نوع B وارد بدن شده باشد، پس از گذشت ۱۰ ساعت چند گلبول قرمز خورده شده است؟



الف) بین ۱۰۰ تا ۵۰۰ هزار
ب) بین ۵۰۰ هزار تا ۱ میلیون
ج) بین ۱ تا ۵ میلیون
د) بین ۵ تا ۱۰ میلیون
هـ) بیش از ۱۰ میلیون

۲۴- دستگاه معادلات روبه‌رو را در نظر بگیرید که در آن A و B ماتریس‌هایی ۲×۲، I ماتریس همانی ۲×۲ و $\overline{O}$ ماتریس ۲×۲ با درایه‌های صفر است. داریم:

$$\begin{cases} ۲A^۶ + ۲A^۲ + A + B = \overline{O} \\ A^۲ - A + I = \overline{O} \end{cases}$$

الف) $۳A + B = \overline{O}$
ب) $A + B = I$
ج) $A + ۳B = \overline{O}$
د) $A^۲ + B^۲ = \overline{O}$
هـ) این دستگاه جواب ندارد.

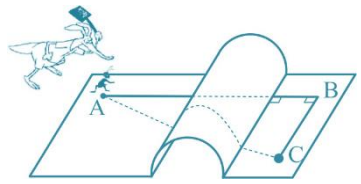
۲۵- می‌خواهیم اعداد طبیعی را طوری رنگ‌آمیزی کنیم که اولاً هر دو عدد متوالی ناهم‌رنگ باشند و ثانیاً برای هر دو عدد ناهم‌رنگ a و b با باقی‌مانده a و b بر ۱۱ متفاوت باشد، یا باقی‌مانده a و b بر ۱۷. کمترین تعداد رنگ‌های لازم چندتاست؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۷ د) ۲۱ هـ) ۱۴۷

۲۶- معادله $\left[\sin x\right] + \left[\frac{x}{۳}\right] = \sin x + \frac{x}{۳}$ چند جواب حقیقی دارد؟ ($\left[a\right]$ جزء صحیح a است.)

الف) جواب ندارد. ب) یکی ج) دوتا د) سه تا هـ) پنج تا

۲۷- در شکل مقابل مثلث ABC قائم‌الزاویه است ($B = ۹۰^\circ$) و $AB = ۱۰ - \pi$ و $BC = ۶$. نیم‌استوانه‌ای با شعاع واحد و محور عمود بر AB، بین نقاط A و C مانع شده است. مورچه بنا به دلایلی (!) باید هر چه سریع‌تر از نقطه A به لانه‌اش در نقطه C برود. طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن برابر است با:



الف) $\sqrt{۱۳۶}$ ب) $\sqrt{۱۳۶} - \pi$ ج) ۱۰ د) $۷ + \pi$ هـ) ۱۱

۲۸- مهره‌ای در مبدأ مختصات قرار داده‌ایم. در هر مرحله مهره را توسط یکی از چهار بردار (m,n)، $(-m,-n)$ یا $(n+۱,m+۱)$ یا $(-n-۱,-m-۱)$ به نقطه دیگری منتقل می‌کنیم و این کار را تکرار می‌کنیم. به ازای کدام یک از (m,n)های زیر می‌توان مهره را به هر نقطه صفحه با مختصات صحیح رساند؟

الف) $m = ۳$ و $n = ۱$
ب) $m = ۳$ و $n = ۲$
ج) $m = ۳$ و $n = ۵$
د) $m = ۴$ و $n = ۷$
هـ) به ازای هیچ m و nای نمی‌توان این کار را انجام داد.

۲۹- فرض کنید $f(x)=x^{۵}+x^{۴}+x^{۳}+x^{۲}+x+۱$. باقی‌مانده تقسیم $f(x^{۱۲})$ بر $f(x)$ کدام است؟

الف) $x^{۳}+x^{۲}+x+۱$ ب) $x^{۲}-x+۶$ ج) $x+۶$ د) ۶ هـ) $۶-x$

۳۰- یک چراغ راهنمای عجیب سه کلید دارد که هر کلید آن می‌تواند در یکی از وضعیت‌های ۱، ۲ یا ۳ قرار گیرد. می‌دانیم که اگر وضعیت هر سه کلید را هم‌زمان تغییر دهیم، رنگ چراغ تغییر می‌کند. ابتدا هر سه کلید در وضعیت ۱ هستند و چراغ قرمز است. افسر پلیس با تغییر وضعیت کلید اول از ۱ به ۲ چراغ را سبز می‌کند. حال اگر کلید دوم را هم در وضعیت ۲ قرار دهد، چراغ چه رنگی می‌شود؟

الف) قرمز

ب) زرد

ج) سبز

د) فقط می‌توان گفت سبز نیست.

هـ) هر رنگی ممکن است باشد

کلید سوالات

۱ الف	۲۱ ب	۴۱ الف
۲ الف	۲۲ الف	۴۲ الف
۳ د	۲۳ ب	۴۳ الف
۴ الف	۲۴ ب	۴۴ الف
۵ الف	۲۵ الف	۴۵ الف
۶ د	۲۶ ج	۴۶ الف
۷ د	۲۷ ب	۴۷ الف
۸ ج	۲۸ د	۴۸ الف
۹ د	۲۹ الف	۴۹ الف
۱۰ ج	۳۰ ب	۵۰ الف
۱۱ ج	۳۱ د	۵۱ الف
۱۲ الف	۳۲ الف	۵۲ الف
۱۳ ج	۳۳ الف	۵۳ الف
۱۴ ج	۳۴ الف	۵۴ الف
۱۵ الف	۳۵ الف	۵۵ الف
۱۶ د	۳۶ الف	۵۶ الف
۱۷ ج	۳۷ الف	۵۷ الف
۱۸ الف	۳۸ الف	۵۸ الف
۱۹ الف	۳۹ الف	۵۹ الف
۲۰ الف	۴۰ الف	۶۰ الف

راه‌حل سؤالات مرحله اول بیست‌ودومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۳

۱- گزینه [ب] صحیح است.

به ازای هر جمله ax^ix^j، جمله ax^jx^i نیز وجود دارد که در مجموع ضریبی زوج می‌سازد مگر این که $i=j$ به ازای حالاتی که i فرد باشد و ضریب نیز زوج است، جمله $x^{۲i}$ ضریب زوج خواهد داشت. در نتیجه به ازای $i=۰,۴,۸,۱۲,۱۶$ ضرایب x^i، فرد هستند.

۲- گزینه [ب] صحیح است.

بیایید از آخر مسئله را حل کنیم. فرض می‌کنیم که در حال حاضر روی سنگ iام هستیم و تعداد روش‌های مختلف برای رسیدن به سنگ ۷ام را یادداشت می‌کنیم. ابتدا مسئله را برای سنگ ۷ام حل می کنیم. (۱ روش).

سپس برای سنگ ۶ام و...

در هر مرحله کافی است که برای سنگ iام، مجموع تعداد روش‌های سنگ‌های $i+۱$ ام تا $۲i$ام را محاسبه کنیم در نتیجه جواب مسئله این‌گونه به دست می‌آید.

$$۷:۱ \to ۶:۱ \to ۵:۲ \to ۴:۴ \to ۳:۷ \to ۲:۱۱ \to ۱:۱۱$$

۳- گزینه [هـ] صحیح است.

دو حالت برای انتخاب زیرمجموعه‌ها ممکن است.

حالت اول: یکی از اعضا در سه زیرمجموعه آمده باشد. تعداد حالات برابر است با: $۶\times\binom{۵}{۳}=۶۰$

حالت دوم: هر عضو دقیقاً در دو زیرمجموعه آمده است. تعداد حالات برابر است با: $\binom{۶}{۳}=۲۰$

تعداد کل روش‌ها برابر مجموع این دو حالت یعنی ۸۰ است.

۴- گزینه [ب] صحیح است.

می‌دانیم باقی‌مانده تقسیم $n^۲$ بر ۳ برابر صفر یا یک است. پس این‌چنین عددی به صورت $۳k$ و یا $۳k+۱$ است.

اگر به صورت $۳k$ باشد: $\left[\frac{n^۲}{۳}\right]$ بر ۳ بخش‌پذیر است. در نتیجه تنها به ازای $\left[\frac{n^۲}{۳}\right]=۳$ عدد اول خواهیم داشت.

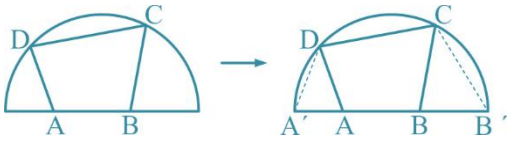
اگر به صورت $۳k+۱$ باشد: $\left[\frac{n^۲}{۳}\right]=\frac{(n-۱)(n+۱)}{۳}$ در نتیجه تنها در صورتی که $n=۴$ باشد، $\left[\frac{n^۲}{۳}\right]=۵$ عدد اول خواهد بود.

در مجموع دو عدد با ویژگی سؤال وجود دارد.

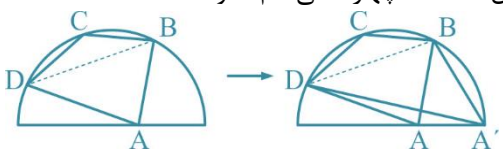
۵- گزینه [ب] صحیح است.

ابتدا ادعا می‌کنیم که چهارضلعی که بیشتری مساحت را دارد، همه رئوسش روی محیط نیم‌دایره قرار دارند. دقت کنید که حداکثر دو رأس از رئوس چهارضلعی می‌تواند روی قطر نیم‌دایره باشد.

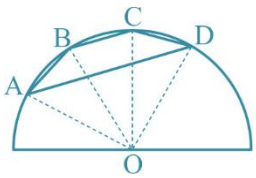
اگر مطابق شکل زیر دقیقاً دو رأس روی قطر باشد، می‌توان مطابق شکل زیر دو رأس را طوری جابه‌جا کرد که مساحت چهارضلعی بیشتر شود.



اگر هم تنها یک رأس روی قطر باشد (مثلاً رأسA) می‌توان آن رأس را با یکی از دو سر قطر که از نقاط روی کمان نیم‌دایره هستند طوری جابه‌جا کرد که ارتفاع مثلث ABD و تبع آن مساحت چهارضلعی کم نشود.



حال فرض کنید چهار نقطه A، B، C و D به همین ترتیب روی دایره هستند. اگر نقطه B دقیقاً وسط A و C نباشد و B را با وسط کمان AC عوض کنیم ارتفاع مثلث ABC و به تبع آن مساحت مثلث زیاد می‌شود. پس در مثلثی که بیشترین مساحت را دارد، کمان AB و BC برابر هستند. با استدلال کاملاً مشابه کمان‌های BC و CD هم باید برابر باشند.



پس چهارضلعی با بیشترین مساحت ذوزنقه با رئوس روی محیط نیم‌دایره است. اگر زاویه کمان AB برابر α باشد، $(۰ \le \alpha \le \frac{\pi}{۳})$، مطابق شکل روبه‌رو برای مساحت چهارضلعی $ABCD$ داریم:

$$\begin{aligned} S(ABCD) &= S(AOB)+S(BOC)+S(COD)-S(AOD) \\ &= ۳S(AOB)-S(AOD) \\ &= \frac{۳}{۲}\sin\alpha - \frac{۱}{۲}\sin(۳\alpha) = \frac{۳}{۲}\sin\alpha - \frac{۱}{۲}(۳\sin\alpha - ۴\sin^۳\alpha) \\ &= ۲\sin^۳\alpha \le ۲\sin^۳\left(\frac{\pi}{۳}\right) = ۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۳ \\ &= \frac{۳\sqrt{۳}}{۴} \end{aligned}$$

پس بیشترین مقدار مساحت برابر $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$ است.

۶- **گزینه [هـ] صحیح است.**

مطابق شکل روبه‌رو اگر $\angle CDB \ge ۹۰^\circ$، با توجه به این که مثلث CDB متساوی‌الساقین است باید $\angle DBC = \angle DCB = \frac{۱}{۲}\angle ACB$ که امکان ندارد. پس $\angle CDB \le ۹۰^\circ$ این نتیجه می‌دهد که $\angle ADC \ge ۹۰^\circ$ و با توجه به متساوی‌الساقین بودن مثلث ADC، باید $\angle CAD = \angle ACD = \frac{۱}{۲}\angle ACB$. با توجه به این اطلاعات از یک سو مثلث‌های BDC و ABC با هم متشابه هستند و نسبت تشابه آن‌ها نتیجه می‌دهد که $BC^۲ = BD.BA$ و از طرف دیگر با توجه به این که CD نیم‌ساز است داریم $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$. بنابراین:

$$\left.\begin{aligned} BC^۲ = BD.BA \Rightarrow \left(\frac{BC}{BA}\right)^۲ &= \frac{BD}{BA} \\ \frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \frac{BC}{AC+BC} &= \frac{BC}{AC+CB} = \frac{BD}{AB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{BC}{AB}\right)^۲ = \frac{\frac{BC}{AB}}{۱+\frac{BC}{AB}}$$

که با طرفین وسطین رابطه آخر و با توجه به این که $\frac{BC}{AB} > ۰$، به معادله‌ای درجه دو برای $\frac{BC}{AB}$ می‌رسیم که از حل آن نتیجه می‌شود.

$$\frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$

۷- **گزینه [هـ] صحیح است.**

اگر برای یک a,b خاص خط و سهمی یک‌دیگر را قطع کنند به زبان جبر این موضوع یعنی این که دستگاه معادلات $\begin{cases} y = x^۲ - ax + ۱ \\ y = ۲b(a - x) \end{cases}$ جواب دارد. به این ترتیب باید حالاتی را بیابیم که این دستگاه جواب دارد.

رابطه دوم را در رابطه اول جای‌گذاری می کنیم:

$$\begin{cases} y = x^۲ - ax + ۱ \\ y = ۲b(a - x) \end{cases} \rightarrow \ldots \rightarrow x^۲ + (۲b - ۲a)x + ۱ - ۲ab = ۰$$

قطع کردن سهمی و خط به این معنی است که معادله درجه دو بالا جواب حقیقی داشته باشد و این معادله زمانی جواب حقیقی دارد که مبین (دلتا $-\Delta$) آن منفی نباشد، به عبارت دیگر اگر بخواهیم این دو همدیگر را قطع نکنند مبین عبارت بالا باید منفی باشد.

$$\Delta < ۰ \rightarrow (۲b - ۲a)^۲ - ۴(۱ - ۲ab) < ۰$$

$$۴a^۲ + ۴b^۲ - ۸ab - ۴ + ۸ab < ۰ \rightarrow ۴a^۲ + ۴b^۲ < ۴ \rightarrow a^۲ + b^۲ < ۱$$

مجموعه نقاط (a,b) در صفحه که $a^۲ + b^۲ = ۱$ دایره به شعاع یک به مرکز مبدأ است. بنابراین $a^۲ + b^۲ < ۱$ نقاط درون این دایره را شامل می‌شود. بنابراین مساحت این ناحیه از رابطه مساحت دایره به دست می‌آید:

$$\text{A مساحت} = \pi R^۲ = \pi * ۱^۲ = \pi$$

۸- **گزینه [د] صحیح ا ست.**

فرض کنید که تعداد خطوط افقی، عمودی و مورب به ترتیب x، y و z باشد در صورتی که این نقاط با یکدیگر تقاطعی نداشته باشند (موازی باشند)، تعداد ناحیه‌ها برابر با $x + y + z + ۱$ خواهد بود. به ازای هر نقطه تقاطع بین خطوط یک ناحیه به شکل اضافه می‌شود. تعداد نقاط تقاطع در شکل برابر است با $xy + yz + xz$

$$xy + yz + xz + x + y + z + ۱ = \frac{(x + y + z)^۲}{۲} - \frac{x^۲ + y^۲ + z^۲}{۲} + ۱۹$$

$$= ۱۸۱ - \frac{x^۲ + y^۲ + z^۲}{۲}$$

با توجه به این که مجموع این سه عدد برابر ۱۸ است، طبق نامساوی حسابی – مربعی:

$$\frac{x^۲ + y^۲ + z^۲}{۲} \geq ۵۴ \Rightarrow x = y = z = ۶ \Rightarrow ۱۸۱ - ۵۴ = ۱۲۷$$

در صورتی که هیچ سه خطی با یکدیگر در یک نقطه تقاطع نداشته باشند این تعداد ناحیه به وجود خواهد آمد.

۹- **گزینه [هـ] صحیح است.**

به ازای هر نقطه در شکل ابتدا نقطه‌ای با فاصله واحد روی خط A پیدا می‌کنیم و دایره‌ای به شعاع واحد از آن می‌گذرانیم. بدین ترتیب مرکز دایره $(x_۲, y_۲)$ و موقعیت نقطه نسبت به مرکز $(x_۱, y_۱)$ خواهد بود.

۱۰- **گزینه [د] صحیح است.**

کمترین فاصله: در صورتی که تنها نقاطی که بیشترین فاصله را از یکدیگر دارند، در دو شکل در نظر بگیریم: ادغام دو شکل چهار نقطه خواهد شد که تشکیل یک لوزی را می‌دهند (چون فاصله ضلع‌ها همگی برابر با d است). درلوزی نیز می‌دانیم بیشترین فاصله زمانی کمینه خواهد شد که شکل مربع باشد که این فاصله برابر $\sqrt{۲}d$ است. مثال برای این حالت دو پاره‌خط است که بر یکدیگر عمود هستند.

بیشترین فاصله: هر دو نقطه که در شکل نهایی در نظر بگیرید، از مجموع دو نقطه در هر شکل به دست آمده است که از یکدیگر حداکثر d واحد فاصله دارند. پس در مجموع فاصله آن‌ها از یکدیگر حداکثر $۲d$ خواهد شد. مثال برای این حالت دو خط است که موازی یکدیگر هستند.

۱۱- گزینه [د] صحیح است.

هر عدد در A_K دقیقاً از ضرب $k!$ عدد اول تشکیل شده است. این حکم به سادگی با استقرا اثبات می‌شود و از طرفی هر عدد با این ویژگی نیز در A_K وجود دارد چرا که می‌توانیم هر عددی را به عوامل اولش تقسیم کنیم و آن را بسازیم. در بین گزینه‌ها تنها $۳^۹ \times ۲^{۱۱۱}$ است که تعداد عوامل اولش $۶! = ۱۲۰$ باشد.

۱۲- گزینه [ب] صحیح است.

با ساده‌سازی روابط به معادله زیر می‌رسیم:

$$\frac{۱}{x} = \frac{ay - x - u}{(x+y)y} \Rightarrow xy + y^۲ + x^۲ = (a-۱)xy$$

به وضوح $a > ۳$ اگر x و y را بر ب.م.م آن‌ها تقسیم کنیم تا نسبت به هم اول باشند، در رابطه بالا از طرفی سمت راست تساوی بر x و y بخش‌پذیر هستند. پس سمت چپ تساوی هم باید بر این دو عدد بخش‌پذیر باشد. بدین ترتیب ثابت می‌شود $x.y \mid x,x \mid y$ بعد از تقسیم x و y به ب.م.م نسبت به هم اول هستند.) در نتیجه

$$x = y \Rightarrow a = ۴$$

۱۳- گزینه [د] صحیح است.

می‌توان به سادگی و با اندکی برابر زاویه‌ها نشان داد که قرینه مرکز ارتفاعی نسبت به خود ضلع BC هم روی دایره محیطی مثلث قرار می‌گیرد. این نقطه را E می‌نامیم. با توجه به قضیه تالس در مثلث HDE (مرکز H ارتفاعی است) می‌توان نتیجه گرفت $DE \parallel BC$ و بنابراین داریم:

$$\angle DAC = \frac{۱}{۲}DC = \frac{۱}{۲}BE = \angle BAD = ۹۰^\circ - \angle B$$

۱۴- گزینه [د] صحیح است.

در ابتدا سعی می‌کنیم $h^{-۱}(x)$ را به دست آوریم. فرض کنید $h(x) = y$:

$$h(x) = \frac{kf(x)}{۱ - f(x)} \Rightarrow (k+y)f(x) = y \Rightarrow x = f^{-۱}\left(\frac{y}{k+y}\right)$$

$$\Rightarrow foh^{-۱}(x) = \frac{x}{k+x} \Rightarrow \frac{x}{foh^{-۱}(x)} - x = \frac{kx + x^۲ - x^۲}{x} = k$$

۱۵- گزینه [ب] صحیح است.

در صورتی که تعداد تاهای افقی و عمودی به ترتیب x و y باشد، تعداد خطوط افقی و عمودی برابر با $۲^x - ۱$ و $۲^y - ۱$ خواهد بود (به ازای هر خط اضافه تعداد نواحی دو برابر می‌شود). در نتیجه اگر تعداد خطوط در انتها برابر با ۳۱۸ باشد، داریم:

$$۲^x + ۲^y = ۳۲۰ = (۱۰۱۰۰۰۰۰۰)_۲ \Rightarrow x, y = ۶, ۸ \Rightarrow x + y = ۱۴$$

۱۶- گزینه [هـ] صحیح است.

شکل نهایی این سؤال از چند بخش تشکیل شده است.

- یک مکعب مستطیل که عمود بر مربع ساخته شده است به حجم ۲.
- چهار نیم‌استوانه که به محوریت ضلع‌های مربع ساخته شده‌اند به حجم $۴ \times \frac{\pi}{۲} = ۲ \times \pi$.
- چهارتا ربع کره که یک کره کامل را تشکیل می‌دهند به حجم $\frac{۴\pi}{۳}$.

پس در مجموع حجم شکل برابر است با: $۲ \times (۱ + \frac{۵\pi}{۳})$

۱۷- گزینه [د] صحیح است.

در صورتی که مجموع هفت رقم برابر با عددی شود که دو رقم دیگر را داراست، این هفت رقم می‌توانند به $۷! = ۵۰۴۰$ حالت مختلف چیده شوند. در نتیجه پاسخ مسئله بر این عدد بخش‌پذیر است.

با توجه به این که مجموع ارقام ۱ تا ۹ برابر ۴۵ است باید دو رقم را حذف کنیم که مجموع بقیه، از این دو رقم شکل گرفته باشد.

اگر دهگان مجموع ۴ باشد: عدد ۴ حذف شده و مجموع کمتر از ۴۱ خواهد شد که نمی‌تواند چنین باشد.

اگر دهگان مجموع ۳ باشد، رقم بعدی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$۳۰ + x = ۴۲ - x \Rightarrow x = ۶$$

اگر دهگان مجموع ۲ و یا ۱ باشد: یکی از ارقام حذف‌شده ۲ است و در هیچ صورتی مجموع هفت رقم کمتر از ۳۰ نخواهد شد.

۱۸- گزینه [ب] صحیح است.

در هر مرحله اگر عدد را به صورت $a - ۱$ نمایش دهیم، پس از حرکات فوق به $۲a - ۱$، $۳a - ۱$ یا $۴a - ۱$ و یا $۵a - ۱$ تبدیل می‌شود.

پس اگر در انتها a تنها از ۲ و ۳ و ۵ تشکیل شده است، در ابتدا نیز باید مضربی از این اعداد باشد.

بین گزینه‌های داده شده تنها $۱۲ - ۱ = ۱۱$ این ویژگی را دارد. پس پاسخ برابر با ۱۱ خواهد بود. ضمناً به سادگی می‌توان نشان داد که با شروع از عدد ۱۱ و تعدادی بار انجام این عمل می‌توان به عدد خواسته شده رسید.

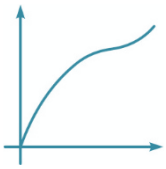
۱۹- گزینه [ب] صحیح است.

تنها اعدادی می‌توانند در دامنه $f_۱$ باشند که در بازه $]-\infty, ۱]$ باشند. در نتیجه دامنه تابع $f_۱$ بازه‌ی $]-\infty, ۱]$ و برد آن اعداد نامنفی است. در نتیجه دامنه و برد تابع $f_۲$ بازه $[۰, ۱]$ خواهد بود. و هم‌چنین به ازای توابع بعدی نیز این دامنه و برد حفظ می‌شود. پس پاسخ بازه $[۰, ۱]$ است.

۲۰- گزینه [ب] صحیح است.

در این سؤال کافی است که به چند نکته دقت کنیم:

- ارتفاع آب در طول زمان همواره صعودی است.



- شیب نمودار در هر لحظه تابعی نزولی از مساحت هر قطاع ظرف است. در نتیجه ابتدا شیب باید زیاد باشد و به مرور زمان کم شود (تا به میانه ظرف که بیشترین مساحت را دارد برسد) و سپس دوباره باید شیب افزایش پیدا کند.

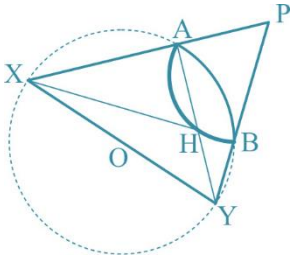
با توجه به موارد فوق تنها گزینه (ب) این ویژگی را دارد.

۲۱- گزینه [ج] صحیح است.

دقت کنید که با توجه به این که XY قطر دایره است، $AX \perp AY$ و $XB \perp BY$، پس مرکز ارتفاعی مثلث PXY همان محل تقاطع XB و AY است. حال دقت کنید، که

$$\angle AHB = \angle XBY + \angle AYB = ۹۰^\circ + \frac{۱}{۲}\angle AOB = ۱۲۰^\circ$$

پس مرکز ارتفاعی روی کمان درخور زاویه ۱۲۰ درجه پاره‌خط AB قرار دارد. پس H روی دایره‌ای به شعاع $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ قرار دارد. (دقت کنید که حالتی که در بالا بررسی شد مربوط به همین ترتیب قرار گرفتن نقاط بود، در حالت‌های دیگر باید وضعیت جداگانه بررسی شود که باز به همین جواب می‌رسیم.)



۲۲- گزینه [الف] صحیح است.

تناظری بین اعداد با ویژگی یاد شده پیدا می‌کنیم به ازای هر عدد یکنوا به صورت $a_۱a_۲a_۳a_۴$ عدد دیگری به صورت $۱۰-a_۱ \quad ۱۰-a_۲ \quad ۱۰-a_۳ \quad ۱۰-a_۴$ انتخاب می‌کنیم که یکنوا است. حال مجموع این دو ع دد برابر با ۱۱۱۱۰ است. پس باید تعداد کل اعداد صعودی چهاررقمی را بیابیم و در عدد ۱۱۱۱۰ ضرب کنیم تا مجموع کل به دست آید.

$$\binom{۹}{۴} \times ۱۱۱۱۰ = ۱۳۹۹۸۶۰$$

۲۳- گزینه [ج] صحیح است.

در ۱۰ ساعت مجموعاً ۳۰ مرحله تغییر نسل صورت می‌گیرد. در مراحل زوج تمامی باکتری‌ها از نوع B و C هستند و در مراحل فرد تمامی باکتری‌ها از نوع A خواهند بود.

هم‌چنین در مراحل زوج تعداد باکتری‌های نوع B با نوع C برابر هستند (به جز مرحله صفرم) و دو برابر تعداد باکتری‌های مرحله قبل. در مراحل فرد نیز تعداد باکتری‌های نوع A، ۳ برابر تعداد باکتری‌های نوع A، در دو مرحله قبل خواهد بود. در نتیجه تعداد گلبول‌های خورده شده در ۱۵ مرحله فرد رخ می‌دهد که تعداد آن‌ها به صورت زیر است:

$$۰ + ۲ + ۶ + \cdots + ۲ \times ۳^{۱۳} = ۲ \times (\frac{۳^{۱۴} - ۱}{۳ - ۱}) = ۴۷۸۲۹۶۹$$

۲۴- گزینه [ج] صحیح است.

از معادله دوم به دست می‌آید:

$$A^۲ = A - I$$

در نتیجه داریم:

$$A^۶ = (A - I)^۳ = A^۳ - ۳A^۲ + ۳A - I = -۲A^۲ + ۲A = I$$
$$۲A^۶ + ۲A^۲ + A + B = \overline{O} \Rightarrow ۲I + (۲A - ۲I) + A + B = \overline{O}$$

۲۵- گزینه [ب] صحیح است.

ثابت می‌کنیم جواب مسئله ۳ است.

شرط دوم مسئله معادل با این است که هر دو عدد که باقی‌مانده ثابتی در تقسیم بر ۱۷×۱۱ داشته باشند، باید هم‌رنگ شوند. چون در غیر این صورت دو عدد ناهم‌رنگ خواهیم داشت که باقی‌مانده‌شان بر ۱۱ و ۱۷ برابر است. در صورتی که از دو رنگ استفاده کنیم، با توجه به شرط اول اعداد باید یک در میان رنگ‌آمیزی شوند و در این صورت رنگ اعداد ۱ و ۱۸۸ متفاوت خواهد بود.

ولی در صوتری که با رنگ سومی داشته باشیم، اعدادی که باقی‌مانده‌شان به پیمانه ۱۷×۱۱ برابر ۱۸۶ باشد را با رنگ سوم، رنگ می‌کنیم و باقی اعداد را یکی در میان با دو رنگ دیگر، بدین ترتیب شرایط مسئله برقرار خواهد شد.

۲۶- گزینه [د] صحیح است.

می‌دانیم که تباع سینوس بین یک و منفی یک است پس:

$$-۱ \le \sin x \le ۱ \Rightarrow -۲ \le \sin x + [\sin x] \le ۲ \Rightarrow -۲ \le \frac{x}{۳} + [\frac{x}{۳}] \le ۲ \Rightarrow -۳ \le x \le ۳$$

حال دو حالت داریم:

الف) $۳ \le x \le ۰$ در این حالت می‌دانیم که اگر $x = ۳$ باشد معادله جواب نخواهد داشت و در غیر این صورت

$$۰ \le x \le ۳ \Rightarrow ۰ \le \frac{x}{۳} < ۱ \Rightarrow \left[\frac{x}{۳}\right] = ۰$$

و همچنین چون $۰ \le x \le ۳$ پس برای تابع سینوس هم خواهیم داشت: $\left[\sin x\right] = ۰$ و در نتیجه معادله به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{x}{۳} = \sin x$$

حال کافی است نمودار خط $\frac{x}{۳}$ با تابع $\sin x$ تقاطع بدهیم. این دو تابع در سه نقطه با هم برخورد می‌کنند. یکی در ناحیه مثبت، یکی در ناحیه نفی و دیگری در صفر. فقط در جواب‌های صفر و مثبت آن قابل قبول ا ست.

ب) اگر $-۳ \le x < ۰$ باشد در این حالت می‌دانیم که:

$$-۳ \le x < ۰ \Rightarrow -۱ \le \frac{x}{۳} < ۰ \Rightarrow \left[\frac{x}{۳}\right] = -۱$$

و همچنین چون $-۳ \le x < ۰$ پس برای تابع سینوس هم خواهیم داشت: $\left[\sin x\right] = -۱$ و در نتیجه باز هم به معادله به صورت زیر درخواهد آمد:

$$\frac{x}{۳} = \sin x$$

حال نمودار خط $\frac{x}{۳}$ با تابع $\sin x$ تقاطع بدهیم. این دو تابع در سه نقطه با هم برخورد می‌کنند. یکی در ناحیه مثبت، یکی در ناحیه منفی و دیگری در صفر. فقط در جواب منفی آن قابل قبول است. پس در مجموع سه جواب خواهیم داشت.

۲۷- گزینه [ج] صحیح است.

اگر فرش زیر پای را می‌کشیم که چروک پدید آمده از بین برود! دراین حالت باز هم مثلثی قائم‌الزاویه ABC را خواهیم داشت که در آن $BC = ۶$ است ولی مقدار AB تغییر می‌کند. AB به اندازه قطر دایره کاهش یافته و به اندازه نصف محیط دایره اضافه می‌شود. بنابراین: $AB = (۱۰ - \pi) - ۲ + \pi$ که داریم: $AB = ۸$ حال طبق قضیه فیثاغورس $AC = ۱۰$ و چون کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه خط مستقیم خواهد بود؛ پس او بعد از چین خوردن دوباره فرش باید درخط مستقیم قبلی حرکت کرده و خود را از A به C برساند.

۲۸- گزینه [هـ] صحیح است.

برای این که مهره بتواند با این حرکت‌ها به همه خانه‌های با مختصات صحیح برسد لازم وکافی است که بتواند با این حرکت‌ها به خانه‌های $(۱,۰)$ و $(۰,۱)$ برسد. معادلاً باید اعداد صحیح مثبت یا منفی a، b، c و d یافت شوند که

$$a(m,n) + b(n+۱, m+۱) = (۱,۰)$$
$$c(m,n) + d(n+۱, m+۱) = (۰,۱)$$

که این روابط هم به بیان دیگری یعنی

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & n \\ n+۱ & m+۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

که این هم نتیجه می‌دهد ماتریس $\begin{bmatrix} m & n \\ n+۱ & m+۱ \end{bmatrix}$ باید وارونی با درایه‌های صحیح داشته باشد، پس باید دترمینانش ± ۱ باشد اما

$$\det\begin{bmatrix} m & n \\ n+۱ & m+۱ \end{bmatrix} = m^۲ + m - n^۲ - n = (m-n)(m+n+۱)$$

که از بین $m-n$ و $m+n+۱$ یکی زوج و دیگری فرد است. پس حاصل‌ضرب آن‌ها نمی‌تواند عددی فرد باشد. پس برای هیچ m و n صحیح این عمل امکان‌پذیر نیست.

۲۹- گزینه [الف] صحیح است.

$f(x^{۱۲}) = f(x).q(x) + r(x)$ که در آن $r(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه کمتر از $f(x)$ است یعنی درجه‌ی $r(x)$ باید کمتر از ۵ باشد. از طرفی می‌دانیم که $f(-۱) = ۰$ که در نتیجه با قرار دادن ۱- در معادله بالا خواهیم داشت:

$$f((-۱)^{۱۲}) = f(-۱).q(-۱) + r(-۱) \Rightarrow f(۱) = ۶ = ۰ + r(-۱)$$

پس باید $r(-۱) = ۰$ باشد که فقط گزینه (الف) این خاصیت را دارد.

۳۰- گزینه [ج] صحیح است.

۱۱۱ قرمز و ۲۱۱ سبز هستند. بنابراین ۳۳۲ و ۳۲۳ هر دو زرد هستند. چون هر دو با تغییر تمام کلیدهای این دو حالت به دست آمده‌اند و باید رنگی غیر از سبز و قرمز (که زرد است) داشته باشند.

با همین استدلال باید ۱۳۲ قرمز باشد، چون ۲۱۱ سبز و ۳۲۳ زرد هستند، پس ۲۲۱ سبز است چرا که نمی‌تواند با ۱۳۲ و ۲۳۲ هم‌رنگ باشد.